

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 9 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2026
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

A1. Δίνεται η σταθερή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = c$, όπου $c \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ότι $f'(x) = 0$.

Μονάδες 6

A2. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Bolzano.

Μονάδες 4

A3. Πότε η ευθεία $y = \ell$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$;

Μονάδες 5

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Έστω η συνάρτηση $f(x) = \eta \mu x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = -\sigma \upsilon \nu x$, $x \in \mathbb{R}$.

β) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 .

γ) Αν f συνεχής στο $[a, b]$ με $f(x) \geq 0$, τότε

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0.$$

δ) Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x, y συνδέονται με τη σχέση $y = f(x)$, όταν f είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του y ως προς x στο σημείο x_0 την παράγωγο $f'(x_0)$.

ε) Κάθε συνάρτηση " $1-1$ " είναι και γνησίως μονότονη.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 4 - \frac{1}{x}$, $x \in (0, +\infty)$.

B1. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται (μονάδες 3) και να βρείτε την αντίστροφή της (μονάδες 5).

Μονάδες 8

Στα επόμενα ερωτήματα να θεωρήσετε $f^{-1}(x) = \frac{1}{4-x}$, $x \in (-\infty, 4)$.

B2. i) Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $g = f + f^{-1}$ (μονάδες 4).

ii) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$$g(x) = 4 - \frac{1}{x} + \frac{1}{4-x}, \quad x \in (0, 4) \quad (\text{μονάδες 6}).$$

Μονάδες 10

B3. Να εξετάσετε αν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g του ερωτήματος B2 στα οποία η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν τα παρακάτω:

- η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = \alpha x^2 + \beta$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

- η f παρουσιάζει στη θέση $x_0 = 1$ τοπικό μέγιστο το 0,

- η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της f στη θέση $x_1 = -\sqrt{\frac{2}{3}}$

σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\omega = \frac{\pi}{4}$ rad.

Γ1. i) Να αποδείξετε ότι $\alpha = -3$ και $\beta = 3$ (μονάδες 4).

ii) Να αποδείξετε ότι $f(x) = -x^3 + 3x - 2$, $x \in \mathbb{R}$ (μονάδες 2).

Μονάδες 6

Γ2. Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f .

Μονάδες 10

Γ3. Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(1+f(x))}{|f(x)|(x-1)^2}$$

Μονάδες 5

Γ4. Να επιλύσετε στο διάστημα $[0, +\infty)$ την εξίσωση $f(e^x) = f(x+1)$

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $xf'(x) - f(1-x) = x^2 + 2x - 3$ για κάθε $x \in [0, 1]$,
- $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0, 1]$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε
$$f'(\xi) + f'(1) = 3.$$

Μονάδες 6

Δ2. i) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα (μονάδες 6).

ii) Να αποδείξετε ότι $f(x) \leq 3$ για κάθε $x \in [0, 1]$ (μονάδες 5).

Μονάδες 11

Δ3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και τις ευθείες $y=3$, $x=0$ και $x=1$.

Μονάδες 8

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. **Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά σας στοιχεία. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μην γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 17:00

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ