

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΤΡΙΤΗ 4 ΙΟΥΝΙΟΥ 2024

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[α, β]$. Αν

- η f είναι συνεχής στο $[α, β]$ και
- $f(α) \neq f(β)$

να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό $ζ$ μεταξύ των $f(α)$ και $f(β)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον, $x_0 \in (α, β)$ τέτοιος ώστε $f(x_0) = ζ$.

Μονάδες 6

A2. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο Δ ;

Μονάδες 4

A3. Να διατυπώσετε το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού.

Μονάδες 5

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού A, B αντίστοιχα, τότε η σύνθεση της f με τη g , δηλαδή η συνάρτηση $g \circ f$, ορίζεται αν $f(A) \cap B \neq \emptyset$.

β) Ισχύει ότι $|\eta\mu x| \leq |x|$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

γ) Ισχύει $(\sigma\phi x)' = \frac{1}{\eta\mu^2 x}$, $x \in \mathbb{R} - \{x \mid \eta\mu x = 0\}$.

δ) Για κάθε συνάρτηση ισχύει ότι το μεγαλύτερο από τα τοπικά της μέγιστα είναι το ολικό της μέγιστο.

ε) Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[α, β]$. Αν $f(x) ≥ 0$ για κάθε $x ∈ [α, β]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx ≥ 0$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $g: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$g(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

και $h: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$h(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

B1. Να προσδιορίσετε τις συναρτήσεις $f = \frac{g}{h}$ και $r = g \cdot h$.

Μονάδες 6

Για τα παρακάτω ερωτήματα να θεωρήσετε ότι

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}, x > 1 \quad \text{και} \quad r(x) = x - \frac{1}{x}, x \geq 1.$$

B2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται (μονάδες 2) και ότι $f^{-1} = f$ (μονάδες 5), όπου f^{-1} είναι η αντίστροφη συνάρτηση της f .

Μονάδες 7

B3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης r .

Μονάδες 6

B4. Να λύσετε την εξίσωση $\left(f^{-1}(f(x))\right)^2 = 1 + 4r(x)$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} -2x+4+e^{\lambda}, & 0 \leq x < 2 \\ -x^2+4x-3+\lambda, & x \geq 2, \end{cases}$$

με $\lambda \in \mathbb{R}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\lambda = 0$.

Μονάδες 5

- Γ2.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη και στη συνέχεια να βρείτε, αν υπάρχουν, τα ακρότατά της.

Μονάδες 6

- Γ3.** i) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού στο διάστημα $[0,3]$.
(μονάδες 4)

ii) Να βρείτε, αν υπάρχει, $\xi \in (0,3)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της f στο σημείο $\Gamma(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $\Delta(0, f(0))$ και $E(3, f(3))$.

(μονάδες 4)

Μονάδες 8

- Γ4.** Κινητό σημείο M ξεκινά από το σημείο $A(2,0)$ και κινείται κατακόρυφα προς τα πάνω με σταθερή ταχύτητα $v=0,5$ μονάδες μήκους το δευτερόλεπτο. Αν O είναι η αρχή των αξόνων, να υπολογίσετε τον ρυθμό με τον οποίο αυξάνεται η γωνία $\hat{\omega} = \hat{AOM}$ τη χρονική στιγμή κατά την οποία το κινητό σημείο M θα συναντήσει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \frac{\ln x + \alpha x}{x},$$

όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

Δίνεται ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $f((0, +\infty)) = \left(-\infty, 1 + \frac{1}{e}\right]$.

- Δ1.** Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$.

Μονάδες 4

- Δ2.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα, x_0 , η οποία ανήκει στο διάστημα $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

Μονάδες 6

- Δ3.** i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=f(4)$ έχει δύο ακριβώς λύσεις, τις $x_1=2$ και $x_2=4$.

(μονάδες 3)

- ii) Να λύσετε την ανίσωση $2^x \leq x^2$ στο διάστημα $(0, +\infty)$.

(μονάδες 5)

Μονάδες 8

- Δ4.** Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$g(x) = f(e^x) \cdot \frac{1-x}{e^x}.$$

Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που βρίσκεται ανάμεσα στις ευθείες $x = -\ln 2$ και $x = 0$, και περικλείεται από αυτές, τον άξονα $x'x$ και τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g .

Μονάδες 7

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους / τις εξεταζόμενες)

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο και να μη γράψετε πουθενά αλλού στο τετράδιό σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, μόνο αν το ζητάει η εκφώνηση, και μόνο για πίνακες, διαγράμματα κ.λπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ