



**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΔΕΥΤΕΡΑ 6 ΙΟΥΝΙΟΥ 2022
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**

(Ενδεικτικές Απαντήσεις)

ΘΕΜΑ Α

A1. Απόδειξη σελίδα 186 σχολικού

A2. Ορισμός σελίδα 142 σχολικού

A3. Ορισμός σελίδα 161 σχολικού

A4.

- α. ΣΩΣΤΟ
- β. ΣΩΣΤΟ
- γ. ΣΩΣΤΟ
- δ. ΛΑΘΟΣ
- ε. ΛΑΘΟΣ

ΘΕΜΑ Β

B1. Για να ορίζεται η $f \circ g$ πρέπει

$$\begin{cases} x \in [0, +\infty) \\ g(x) \in (0, 1] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Άρα $A_{f \circ g} = [0, 1]$

$$\text{Επίσης } (f \circ g)(x) = \sqrt{x^4} - 2\sqrt{x^2} + 1 = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$$

$$\text{Επομένως } h(x) = (f \circ g)(x) = (x - 1)^2, \quad x \in [0, 1]$$

B2. Έστω $h(x) = y \Leftrightarrow (x - 1)^2 = y \Leftrightarrow |x - 1| = \sqrt{y} \stackrel{y \geq 0}{\Leftrightarrow} \stackrel{0 \leq x \leq 1}{\Leftrightarrow} -x + 1 = \sqrt{y} \Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{y}$

Επίσης πρέπει $0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq -\sqrt{y} + 1 \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq y \leq 1$

Επομένως $h^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x}, x \in [0,1]$

$$H \varphi(x) = \begin{cases} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x}, & x \in [0,1) \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \end{cases}$$

B3.

I. Για να ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών πρέπει η φ να είναι συνεχής στο $[0,1]$ και $\varphi(0) \neq \varphi(1)$

Η φ στο $[0,1)$ είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών

Αφού

$$\varphi(1) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{(1-x)(1+\sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1-x}{(1-x)(1+\sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{1+\sqrt{x}} = \frac{1}{2}$$

άρα $\varphi(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \varphi(x)$, επομένως η φ είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ συνεπώς η φ συνεχής στο $[0,1]$

Επίσης $\varphi(0) = 1$ άρα

$$\varphi(0) \neq \varphi(1)$$

Άρα ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών

$$\text{II. Για } \frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{2} \xLeftrightarrow{\eta \mu \uparrow \text{ στο } (0, \frac{\pi}{2})} \eta \mu \alpha < \frac{\pi}{6} < \eta \mu \alpha < \eta \mu \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \eta \mu \alpha < 1,$$

Το $\eta \mu \alpha$ είναι μία ενδιάμεση τιμή μεταξύ των $\varphi(0)$ και $\varphi(1)$, άρα από Θ.Ε.Τ. υπάρχει $x_0 \in (0,1) : \varphi(x_0) = \eta \mu \alpha$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για κάθε $x < -1$:

$$f'(x) = -2 \xLeftrightarrow{\Sigma.\Theta.M.T} f'(x) = (-2x)'$$

Άρα $f(x) = -2x + c_1$ για κάθε $x \leq -1$.

Για κάθε $x > -1$:

$$f'(x) = 3x^2 - 1 \xLeftrightarrow{\Sigma.\Theta.M.T} f'(x) = (x^3 - x)'$$

Άρα $f(x) = x^3 - x + c_2$ για κάθε $x > -1$.

Αφού η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων έχουμε $f(0) = 0 \Leftrightarrow c_2 = 0$

Επομένως έχουμε:

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 2 + c_1, & x \leq -1 \\ x^3 - x, & x > -1 \end{cases}$$

Η f είναι συνεχής στο -1 συνεπώς $f(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) \Leftrightarrow c_1 = -2$

Γ2. Για $x_0 > -1$ εφαπτομένη στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ έχει εξίσωση:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Επειδή διέρχεται από το $(0, -2)$ έχουμε:

$$\begin{aligned} -2 - f(x_0) &= f'(x_0)(0 - x_0) \Leftrightarrow \\ -2 - x_0^3 + x_0 &= -3x_0^2 + x_0 \Leftrightarrow x_0^3 = 1 \Leftrightarrow x_0 = 1 \end{aligned}$$

Συνεπώς η εξίσωση της εφαπτομένης είναι: $y = 2x - 2$.

Γ3. Αφού M είναι σημείο της (ε) τότε $M(x, 2x-2)$

Και K η προβολή του M στον $x'x$ τότε $K(x, 0)$

Το εμβαδόν του τριγώνου MKG : $E = \frac{MK \cdot KG}{2} = \frac{(x-2) \cdot (2x-2)}{2} = x^2 - 3x + 2$

Επομένως $E(x(t)) = x^2(t) - 3x(t) + 2$

Άρα $E'(t) = 2x(t)x'(t) - 3x'(t)$ και για $t = t_0$ είναι $x(t_0) = 3$ και $x'(t_0) = 2$

Άρα $E'(t_0) = 2 \cdot 3 \cdot 2 - 3 \cdot 2 = 6 \frac{\text{μν}^2}{\text{sec}}$

$$\text{Γ4. } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\eta \mu f(x)}{f(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{f(x)} \eta \mu \frac{1}{\frac{1}{f(x)}} \right) \stackrel{\substack{x \rightarrow -\infty \\ u \rightarrow 0 \\ u = \frac{1}{f(x)}}}{=} \lim_{u \rightarrow 0} \left(u \eta \mu \frac{1}{u} \right) = 0$$

Και

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(-x)}{1 - x^3} \stackrel{\substack{x \rightarrow -\infty \\ y \rightarrow +\infty \\ y = -x}}{=} \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{f(y)}{y^3 + 1} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y^3 - y}{y^3 + 1} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y^3}{y^3} = 1.$$

Επομένως έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{\eta \mu f(x)}{f(x)} + \frac{f(-x)}{1 - x^3} \right] = 0 + 1 = 1$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

I. Η f είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$

x	0	1	$+\infty$
f'		-	+
f'		$\searrow$	$\nearrow$

$$\Delta_1 = (0, 1], \quad \Delta_2 = (1, +\infty)$$

$$f(\Delta_1) \stackrel{\text{φθιν.}}{=} \left[f(1), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right) = [1 - \ln 3, +\infty),$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x - \ln(3x)) = 0 - (-\infty) = +\infty$$

$$f(\Delta_2) \stackrel{\text{αυξ.}}{=} (f(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)) = (1 - \ln 3, +\infty), \text{ αφού}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln(3x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{\ln(3x)}{x} \right) = +\infty \text{ επειδή}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(3x)}{x} \stackrel{DLH}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

Αφού $0 \in f(\Delta_1)$ και f γν. μονότονη υπάρχει μοναδικό $x_1 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f(x_1) = 0$

Αφού $0 \in f(\Delta_2)$ και f γν. μονότονη υπάρχει μοναδικό $x_2 \in (1, +\infty)$ τέτοιο ώστε $f(x_2) = 0$

II. Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0$.

Άρα η f είναι κυρτή.

Δ2. Το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$E = \int_{x_1}^{x_2} |f(x)| dx.$$

Όμως για κάθε $x \in (x_1, x_2)$ είναι $f(x) \neq 0$, η f είναι συνεχής στο (x_1, x_2) συνεπώς από την συνέπεια του θεωρήματος Bolzano έχουμε ότι η f διατηρεί πρόσημο. Επίσης ισχύει $f(1) = 1 - \ln 3 < 0$ επομένως $f(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [x_1, x_2]$

$$E = \int_{x_1}^{x_2} |f(x)| dx = \int_{x_1}^{x_2} (\ln 3x - x) dx = \left[x \ln 3x - x - \frac{x^2}{2} \right]_{x_1}^{x_2} =$$

$$x_2 \ln(3x_2) - x_2 - \frac{x_2^2}{2} - x_1 \ln(3x_1) + x_1 + \frac{x_1^2}{2}$$

Όμως

$$f(x_1) = 0 \Leftrightarrow \ln(3x_1) = x_1$$

$$f(x_2) = 0 \Leftrightarrow \ln(3x_2) = x_2$$

Άρα

$$E = x_2 \ln(3x_2) - x_2 - \frac{x_2^2}{2} - x_1 \ln(3x_1) + x_1 + \frac{x_1^2}{2} = \frac{x_2^2}{2} - \frac{x_1^2}{2} - (x_2 - x_1)$$

$$= \frac{1}{2} (x_2 - x_1)(x_2 + x_1 - 2)$$

Δ3. Έχουμε ότι $E > 0 \Leftrightarrow x_1 + x_2 - 2 > 0 \Leftrightarrow 2 - x_1 < x_2$ διότι η f δεν είναι σταθερή στο $[x_1, x_2]$

Επίσης $x_1 < 1 \Rightarrow 2 - x_1 > 1$

Άρα έχουμε:

$$2 - x_1 < x_2 \stackrel{\substack{2-x_1, x_2 \in (1, +\infty) \\ f \text{ αύξουσα}}}{\Rightarrow} f(2 - x_1) < f(x_2) \Rightarrow f(2 - x_1) < 0$$

Δ4. Αφού η f είναι κυρτή έχουμε :

$$f(x) \geq f'(x_2)(x - x_2) + f(x_2) \Leftrightarrow f(x) \geq f'(x_2)(x - x_2)$$

Με την ισότητα να ισχύει μόνο όταν $x = x_2$

Όμως $2f(x) + \ln 3 - 1 \geq f(x) \Leftrightarrow f(x) \geq f(1)$ με την ισότητα να ισχύει μόνο όταν το $x = 1$ διότι η f έχει ολικό ελάχιστο μόνο στο 1.

Συνεπώς η εξίσωση είναι αδύνατη.