



(Ενδεικτικές Απαντήσεις)

ΘΕΜΑ Α΄

A1. Απόδειξη σελ.135 σχολικού.

A2. Διατύπωση θεωρήματος σελ.51 σχολικού.

A3. Ορισμός Ισότητας Συναρτήσεων σελ.23 σχολικού

A4.

A)ΣΩΣΤΟ

B)ΛΑΘΟΣ

Γ)ΣΩΣΤΟ

Δ)ΣΩΣΤΟ

E)ΣΩΣΤΟ

ΘΕΜΑ Β΄

B1. Στη δοθείσα σχέση θέτω $w=x+1 \Leftrightarrow x=w-1$

Οπότε $f(w)=we^{-w+1} \Leftrightarrow f(w)=we^{-w+1}$

Άρα $f(x)=xe^{1-x}, x \in \mathbb{R}$

B2. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως γινόμενο της πολυωνυμικής συνάρτησης $y=x$ και της σύνθεσης συνεχών $y=e^{1-x}$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με:

$$f'(x)=(x)' e^{1-x} + x(e^{1-x})' = e^{1-x} + x e^{1-x} (1-x)' = e^{1-x} - x e^{1-x} = (1-x) e^{1-x}$$

επειδή $e^{1-x} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ το πρόσημο της $f'(x)$ καθορίζεται από το $1-x$ οπότε:

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1-x > 0 \Leftrightarrow x < 1$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 1-x < 0 \Leftrightarrow x > 1$$

$$Hf'(x)=0 \Leftrightarrow (1-x) e^{1-x}=0 \Leftrightarrow 1-x=0 \Leftrightarrow x=1$$

Κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμου της $f'(x)$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$\oplus$	$-$
$f(x)$			

O.M
 $f(1)=1$

Άρα στο $(-\infty, 1]$ η f γνησίως αύξουσα και στο $(1, +\infty)$ η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Στο $x_0=1$ παρουσιάζει ολικό μέγιστο με μέγιστη τιμή την $f(1)=1$.

B3.

$$f'(x)=[(1-x)e^{1-x}]' = (1-x)'e^{1-x} + (1-x)(e^{1-x})' = -e^{1-x} + (1-x)e^{1-x}(-1) = -e^{1-x} - (1-x)e^{1-x} = -(x-2)e^{1-x}$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow (x-2)e^{1-x}=0 \Leftrightarrow x-2=0 \Leftrightarrow x=2$$

το πρόσημο της $f'(x)$ καθορίζεται από το πρόσημο του $x-2$. Έτσι :

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x-2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x-2 < 0 \Leftrightarrow x < 2$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	$\oplus$	$+$
$f(x)$			

Η f κοίλη στο $(-\infty, 2]$ και κυρτή στο $(2, +\infty)$

Στο $x_0=2$ αλλάζουν τα κοίλα, ορίζεται εφαπτομένη οπότε το σημείο $(2, f(2))=(2, \frac{2}{e})$ είναι σημείο καμπής.

Ασύμπτωτες

Κατακόρυφη ασύμπτωτη η C_f δεν έχει ως συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

Πλάγια ή οριζόντια

Επειδή το όριο της εκθετικής συνάρτησης είναι διαφορετικό όταν $x \rightarrow +\infty$ από όταν $x \rightarrow -\infty$ έχουμε:

Στο $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xe^{1-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1-x} = \lim_{u \rightarrow -\infty} e^u = 0 \quad (\text{θέτω } u=1-x)$$

$$\beta = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 0 \cdot x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot e^{1-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{x-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{x-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{x-1}} = 0$$

από κανόνα De L' Hospital.

Αρα η $y=0$ οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Στο $-\infty$

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\infty \frac{x e^{1-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{1-x} = \lim_{u \rightarrow +\infty} e^u = +\infty \quad (\text{θέτω } u=1-x)$$

Αρα στο $-\infty$ δεν έχει ούτε πλάγια ούτε οριζόντια ασύμπτωτη.

$$B4. \quad f((-\infty, 1]) = (\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(1)] = (-\infty, 1] \quad \text{γιατί} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot e^{1-x} = -\infty$$

$$f((1, +\infty)) = (\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)) = (0, 1) \quad \text{γιατί} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = 1$$

Αρα η ένωση των προηγούμενων 2 διαστημάτων δίνει το σύνολο τιμών $(-\infty, 1]$.

υ) Δια κρίνουμε τις περιπτώσεις:

Αν $\lambda > 1$ η $f(x) = \lambda$ είναι αδύνατη.

Αν $\lambda = 1$ η $f(x) = 1$ έχει μοναδική ρίζα την $x=1$

Αν $0 < \lambda < 1$ η $f(x) = \lambda$ έχει 2 ακριβώς ρίζες μια στο $(-\infty, 1)$ και μια στο $(1, +\infty)$ ως γνησία μονότονη σε καθένα από αυτά.

Αν $\lambda \leq 0$ τότε έχει μοναδική ρίζα.

Γ1.

Στο $(-\infty, 0)$ η f είναι συνεχής ως πολυωνυμική.

Στο $(0, \frac{3\pi}{2}]$ η f είναι συνεχής, ως τριγωνομετρική.

Στο $x_0=0$ έχω

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (ax^3 - 3x^2 - x + 1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow +} \sin x = 1$$

$$f(0) = a \cdot 0^3 - 3 \cdot 0^2 - 0 + 1 = 1$$

Αρα $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ οπότε η f είναι συνεχής και στο $x_0=0$ άρα συνεχής στο πεδίο ορισμού της $(-\infty, \frac{3\pi}{2}]$.

Για την παραγωγισιμότητα στο $x_0=0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{ax^3 - 3x^2 - x + 1 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{ax^3 - 3x^2 - x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(ax^2 - 3x - 1)}{x} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x - 1}{x} = 0$$

Άρα η f όχι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$

Γ2. Η f συνεχής στο $[0, \frac{3\pi}{2}]$ από το προηγούμενο ερώτημα.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, \frac{3\pi}{2})$ με $f'(x) = (\sin x)' = -\cos x$

$$f(0)=1, \quad f(\frac{3\pi}{2}) = \sin \frac{3\pi}{2} = 0$$

Άρα δεν ισχύει μία από τις προϋποθέσεις του Θ. Rolle στο $[0, \frac{3\pi}{2}]$.

ii) Στο διάστημα $(0, \frac{3\pi}{2})$ έχω $f'(x)=0 \Leftrightarrow -\cos x=0 \Leftrightarrow \cos x=0 \Leftrightarrow x=\pi$

Άρα το $\xi=\pi$ είναι μοναδική ρίζα της $f'(x)=0$

Γ3. Για $x \in (-\infty, 0)$ η εφαπτομένη έχει συντελεστή διεύθυνσης $f'(x) = (ax^3 - 3x^2 - x + 1)' = 3ax^2 - 6x - 1$

Θα δείξω ότι η εξίσωση $f'(x)=0$ είναι αδύνατη.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \cdot a \cdot (-1) = 36 + 4a = 4(9 + a) < 0 \text{ αφού } a < -9.$$

Άρα δεν υπάρχει σημείο $(x_0, f(x_0))$ με $x_0 < 0$ όπου η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

Γ4. Για $x < 0$ η $f'(x) = 3ax^2 - 6x - 1 < 0$ γιατί είναι τριώνυμο ομόσημο του a με $a < 0$.

Στο $(0, \frac{3\pi}{2}]$ έχουμε ότι $f'(x)=0 \Leftrightarrow -\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \pi$

Κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμου

X	$-\infty$	0	π	$3\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	-	-	⊕	+
$f(x)$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	

Η f συνεχής άρα είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, 0]$, $[0, \pi]$ και γνησίως αύξουσα στο $[\pi, \frac{3\pi}{2}]$.

Στο $x_0=\pi$ παρουσιάζει ελάχιστο με ελάχιστη τιμή $f(\pi) = \sin \pi = -1$.

Άρα $f(x) \geq f(\pi) \Leftrightarrow f(x) \geq -1$ για κάθε $x \in (-\infty, \frac{3\pi}{2}]$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = \ln x - \frac{1}{x}, x \in (0, \infty)$.

Η f συνεχής στο $(0, +\infty)$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων άρα και στο $[1, e]$.

- $f(1) = \ln 1 - 1 = -1 < 0$
- $f(e) = \ln e - \frac{1}{e} = 1 - \frac{1}{e} = \frac{e-1}{e} > 0,$

άρα $f(1) \cdot f(e) < 0$ οπότε από Θ. Bolzano,

η $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα $x_0 \in (1, e)$

Η f παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = \left(\ln x - \frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0$, άρα f ως συνεχής είναι γν. αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

Οπότε η $f(x) = 0$ έχει το πολύ μία ρίζα στο $(0, +\infty)$ και επειδή έχει την x_0 που εξασφαλίσαμε, η ρίζα αυτή είναι μοναδική.

Δ2.

Η $f(x) = (\ln x_0) \cdot (x + 1) - \ln x - 1, x \in (0, +\infty)$ είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Η f παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

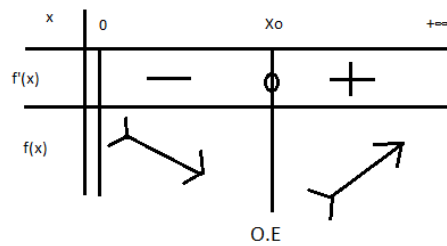
$$f'(x) = \ln x_0 \cdot 1 - \frac{1}{x} = \ln x_0 - \frac{1}{x}.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x_0 = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x \cdot \ln x_0 = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\ln x_0} = \frac{1}{\frac{1}{x_0}} = x_0$$

Για το πρόσημο της $f'(x)$ έχουμε

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\Leftrightarrow \ln x_0 - \frac{1}{x} > 0 \Leftrightarrow \ln x_0 > \frac{1}{x} \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} \ln x_0 \cdot x > 1 \stackrel{\ln x_0 = \frac{1}{x_0}}{\Leftrightarrow} \frac{1}{x_0} \cdot x > 1 \\ &\stackrel{x_0>0}{\Leftrightarrow} x > x_0 \end{aligned}$$

Ανάλογα $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < x_0$



Στο $(0, +\infty)$ η f γνήσια φθίνουσα και στο $[x_0, +\infty]$ η f γνήσια αύξουσα. Άρα στο x_0 παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το

$$\begin{aligned} f(x_0) &= (\ln x_0) * (x_0 + 1) - \ln x_0 - 1 = \\ &= x_0 * \ln x_0 + \ln x_0 - \ln x_0 - 1 = \\ &= x_0 * \frac{1}{x_0} - 1 = 0 \end{aligned}$$

Δ3.

$$g(x) = h(x) \Leftrightarrow xe^{-x} = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} \Leftrightarrow \frac{x}{e^x} = \frac{(x_0)^{x+1}}{e^{x+1}} \Leftrightarrow e^{x+1}x = e^x (x_0)^{x+1} \Leftrightarrow ex = (x_0)^{x+1}$$

(2)

Αν $x \leq 0$ η (2) είναι αδύνατη οπότε η (2) ορίζεται στο $(0, +\infty)$.

Επομένως :

$$\ln(ex) = \ln(x_0)^{x+1} \Leftrightarrow \ln x + 1 = (x+1)\ln x_0 \Leftrightarrow (x+1)\ln x_0 - \ln x - 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_0$$

Άρα $\boxed{g(x_0) = h(x_0)}$

Η $g(x) = xe^{-x}$ παραγωγίσιμη με $g'(x) = e^{-x} - xe^{-x}$

Η $h(x) = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}$ είναι παραγωγίσιμη με $h'(x) = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} \ln\left(\frac{x_0}{e}\right)$

$$g'(x_0) = e^{-x_0} - x_0 e^{-x_0} = \frac{1-x_0}{e^{x_0}}$$

$$h'(x_0) = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_0+1} \cdot \ln\left(\frac{x_0}{e}\right) = x_0 e^{-x_0} (\ln x_0 - 1) = \frac{x_0}{e^{x_0}} \left(\frac{1}{x_0} - 1\right) = \frac{x_0}{e^{x_0}} \left(\frac{1-x_0}{x_0}\right) = \frac{1-x_0}{e^{x_0}}$$

Άρα $\boxed{g'(x_0) = h'(x_0)}$

Επειδή $g(x_0) = h(x_0)$ και $g'(x_0) = h'(x_0)$ οι C_g, C_h έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο με τετμημένη x_0

Δ4. Η απόσταση των σημείων $A(x, f(x)), B(x, \varphi(x))$ για $x > 0$ είναι

$$AB = \sqrt{(x-x)^2 + (f(x) - \varphi(x))^2} = |f(x) - \varphi(x)| = f(x) - \varphi(x)$$

Αλλιώς επειδή τα A, B έχουν την ίδια τετμημένη η απόσταση AB είναι η κατακόρυφη απόστασή τους οπότε $(AB) = |f(x) - \varphi(x)| = f(x) - \varphi(x)$

Έστω η συνάρτηση $t(x) = f(x) - \varphi(x), x > 0$.

Η t είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ ως διαφορά συνεχών.

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις για την παραγωγισιμότητα της φ στο x_0 .

Αν η φ δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της.

Αν η φ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 επειδή και η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 σύμφωνα με το θεώρημα παράγωγος αθροίσματος η $t(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 με $t'(x_0) = f'(x_0) - \varphi'(x_0) = -\varphi'(x_0)$.

Το x_0 εσωτερικό σημείο του $(0, +\infty)$ οπότε η t παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0 , οπότε από Θεώρημα Fermat $t(x_0) = 0 \Leftrightarrow -\varphi(x_0) \Leftrightarrow \varphi'(x_0) = 0$ άρα το x_0 κρίσιμο σημείο της.

Έτσι το x_0 σε κάθε περίπτωση είναι κρίσιμο σημείο της φ .