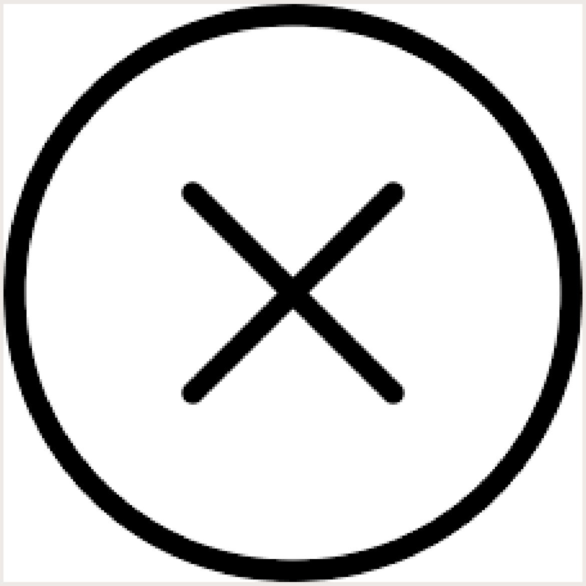


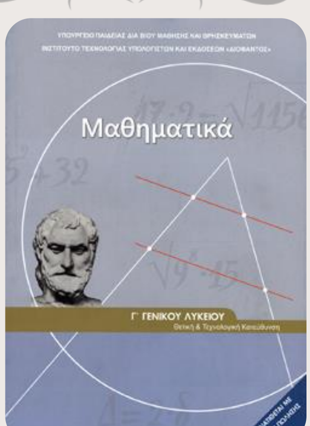
Θρηνούμε για τις φωτιές και τις πλημμύρες που έπληξαν την χώρα μας

ΛΥΣΕΙΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΣΑΒΒΑΤΟ

9 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2023



ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ

lisari team

ΛΥΣΕΙΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2023

1η έκδοση

Ιορδάνης Κοσόγλου

Μάκης Χατζόπουλος

Οι απαντήσεις - λύσεις είναι αποτέλεσμα της συλλογικής δουλειάς των μελών της **lisari team**

1η έκδοση: 11 – 9 – 2023 *(συνεχής ανανέωση)*

Οι λύσεις διατίθεται **αποκλειστικά**

από το μαθηματικό ιστότοπο

lisari.blogspot.com

Πρόλογος

Στο παρόν αρχείο περιλαμβάνονται οι απαντήσεις των Επαναληπτικών Πανελλαδικών Εξετάσεων 2023 στο μάθημα **Μαθηματικά Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών Οικονομίας και Πληροφορικής.** Η παρουσίαση των απαντήσεων είναι πλήρης και αναλυτική στο μέγιστο δυνατό, προκειμένου οι μαθητές να μπορούν να μελετήσουν και να επεξεργαστούν εύκολα το αρχείο.

Η εργασία αυτή εκπονήθηκε αποκλειστικά από τη γνωστή **διαδικτυακή ομάδα Μαθηματικών** από διάφορα μέρη της Ελλάδος, τη **lisari team.** *Φέτος, θρηνούμε και συμπαραστεκόμαστε στην αγωνία και στο μαρτύριο των συμπολιτών μας στον Έβρο και στη Θεσσαλία μετά τις φωτιές και τις πλημμύρες που υπέστησαν αντίστοιχα.*

Την αρχική συγγραφή των λύσεων ακολούθησαν ενδελεχείς έλεγχοι, διορθώσεις και βελτιώσεις με στόχο μια **πληρέστερη και πιο ποιοτική παρουσίαση**. Ζητούμε συγνώμη για τυχόν παραλείψεις, λάθη ή αστοχίες που ενδεχομένως θα έχουν διαφύγει της προσοχής μας, γεγονός αναπόφευκτο δεδομένων των στενών χρονικών περιθωρίων. Θα ακολουθήσουν επόμενες εκδόσεις, όπου η εν λόγω παρουσίαση θα βελτιωθεί, ίσως εμπλουτιστεί και με εναλλακτικές λύσεις.
Οποιαδήποτε σχόλια, παρατηρήσεις, διορθώσεις και βελτιώσεις επί των λύσεων είναι ευπρόσδεκτα στην ηλεκτρονική διεύθυνση lisari.blogspot@gmail.com.

Με εκτίμηση

lisari team

11 Σεπτεμβρίου 2023

lisari team

1. Αντωνόπουλος Νίκος (3ο ΓΕΛ Άργους)

2. Αυγερινός Βασίλης (Φροντιστήριο "Διάταξη" - Ν. Σμύρνη)

3. Βελαώρας Γιάννης (Φροντιστήριο "Βελαώρας" - Λιβαδειά Βοιωτίας)

4. Βοσκάκης Σήφης (Φροντιστήριο "Ευθύνη" - Ρέθυμνο)

5. Γιαννόπουλος Μιχάλης (Θεσσαλονίκη - Αμερικάνικη Γεωργική Σχολή)

6. Γκριμπαβιώτης Παναγιώτης (Φροντιστήριο "Λύση" - Άρτα)

7. Δούδης Δημήτρης (3ο Λύκειο Αλεξανδρούπολης)

8. Ζαμπέλης Γιάννης (Φροντιστήρια "Πουκαμισάς" Γλυφάδας)

9. Κακαβάς Βασίλης (Φροντιστήριο "Ώθηση" - Μαρούσι)

10. Κάκανος Γιάννης (Φροντιστήριο "Παπαπαναγιώτου – Κάκανος" - Σέρρες)

11. Κανάβης Χρήστος (6ο ΓΕΛ Αιγάλεω)

12. Κατζιώτη Χαρά (2ο Γυμνάσιο Πρέβεζας)

13. Κουλούρης Ανδρέας (3ο ΓΕΛ Γαλατσίου)

14. Κουστέρης Χρήστος (Φροντιστήριο "Στόχος" - Περιστέρι)

15. Κοπάδης Αθανάσιος (Φροντιστήριο 19+ στο Πολύγωνο και Ευρωπαϊκό Πρότυπο)

16. Κοσόγλου Ιορδάνης (ΓΕ.Λ Εξαπλατάνου)

17. Μανώλης Ανδρέας (Φροντιστήριο "Ρηγάκης" και Φροντιστήριο 20' – Κοζάνη)

18. Μαρούγκας Χρήστος (3ο ΓΕΛ Κηφισιάς)

19. Μπαδέμης Δημήτρης (Καθηγητής μαθηματικών στην Ιδιωτική Εκπαίδευση)

20. Νάννος Μιχάλης (1ο Γυμνάσιο Σαλαμίνας)

21. Νικολόπουλος Αθανάσιος (2ο ΓΕΛ, Ζάκυνθος)

22. Παγώνης Θεόδωρος (Φροντιστήριο "Εις τη ν" - Αγρίνιο)

23. Παπαμικρούλης Δημήτρης (Ελληνογαλλική Σχολή Jeanne d'Arc)

24. Ποδηματάς Θωμάς (Σπουδαστήριο Μαθηματικών Θωμάς και Ρόζα Ποδηματά - Βόλος)

25. Πολύζος Γιώργος (τ. πάρεδρος στο Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, συγγραφέας)

26. Ράπτης Γιώργος (6ο ΓΕΛ Βόλου)

27. Σίσκας Χρήστος (Φροντιστήριο "Μπαχαράκης" - Θεσσαλονίκη)

28. Σκομπρής Νίκος (Συγγραφέας – 1ο Λύκειο Χαλκίδας)

29. Σπλήνης Νίκος (Φροντιστής)

30. Σταυρόπουλος Παύλος (Ιδιωτικά Εκπαιδευτήρια Δούκα)

31. Σταυρόπουλος Σταύρος (Πρόεδρος Ε.Μ.Ε Κορινθίας - ΓΕΛ Ζευγολατιού)

32. Τάσος Νίκος (Σύμβουλος Ι.Ε.Π.)

33. Τσακαλάκος Τάκης (Συνταξιούχος αλλά ενεργός μαθηματικός)

34. Χαραλάμπους Σταύρος (Μουσικό Σχολείο Λαμίας)

35. Χασάπης Γεώργιος (Ιδιωτικός υπάλληλος)

36. Χατζόπουλος Μάκης (Πρότυπο ΓΕΛ Βαρβάκειο Σχολή)

lisari team / Σχολικό έτος 2022 – 23

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΣΑΒΒΑΤΟ 9 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2023

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΣΕΛΙΔΕΣ: ΕΞΙ (6)

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία **Α2.** Θεωρία **Α3.** Θεωρία

Α4. α) Σ β) Λ γ) Σ δ) Λ ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Πρέπει και αρκεί $e^x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow e^x \neq 1 \Leftrightarrow e^x \neq e^0 \Leftrightarrow x \neq 0$ άρα $D_g = \mathbb{R}^*$.

Πρέπει και αρκεί $x > 0$ άρα $D_h = (0, +\infty)$. Έχουμε,

$$D_{g\circ h} = \{x \in D_h \,/\, h(x) \in D_g\} = \{x \in (0,+\infty) / \ln x \in \mathbb{R}^*\} = \begin{cases} x > 0 \\ \ln x \neq 0 \end{cases} = \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} = (0,1) \cup (1,+\infty).$$

Για κάθε $x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$ έχουμε:

$$f(x) = (g \circ h)(x) = g(h(x)) = g(\ln x) = \frac{e^{\ln x} + 1}{e^{\ln x} - 1} = \frac{x+1}{x-1} .$$

Β2. Για κάθε $x > 1$ έχουμε ότι η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)' = \frac{x - 1 - (x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2} < 0.$$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(1, +\infty)$, επομένως ορίζεται η f^{-1}. Το σύνολο τιμών της f είναι $\left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)\right) = (1, +\infty)$ διότι

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x} = 1 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x+1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+}\left[(x+1)\frac{1}{x-1}\right] = +\infty .$$

Επομένως, για κάθε $x > 1$ και $y > 1$ έχουμε διαδοχικά:

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{x+1}{x-1} \Leftrightarrow yx - y = x + 1 \Leftrightarrow yx - x = y + 1$$

$$\Leftrightarrow (y-1)x = y + 1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{y+1}{y-1}$$

$$\Leftrightarrow f^{-1}(y) = \frac{y+1}{y-1}$$

Τελικά, $f^{-1} = f$.

Β3. Αποδείξαμε ότι $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x+1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+}\left[(x+1)\frac{1}{x-1}\right] = +\infty$ άρα η ευθεία $x=1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

Επίσης,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x-1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x} = 1$$

άρα η ευθεία $y=1$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Β4. Γνωρίζουμε ότι, $f(x)>1$ για κάθε $x>1$. Επίσης συνx ≤ 1 για κάθε $x>1$, άρα η εξίσωση $f(x) = $ συνx είναι αδύνατη στο $(1,+\infty)$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. i. Θα αποδείξουμε ότι η εξίσωση $f(x)=-x+2$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1,2)$.

Έστω η συνάρτηση $g(x)=f(x)+x-2$.

- η g είναι συνεχής στο $[1,2]$
- $g(1)g(2) = (f(1)-1)f(2) = (-1)\cdot 2 = -2 < 0$

άρα η εξίσωση $g(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=-x+2$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(1,2)$.

ii.

Α΄ τρόπος	**Β΄ τρόπος**
Η C_f και η ευθεία $(\varepsilon_2): y=x$ έχουν ένα κοινό σημείο το $(2,2)$. Επειδή, $f'(2)=1=\lambda_{\varepsilon_2}$ η ευθεία ε_2 εφάπτεται της C_f στο σημείο $(2,2)$.	Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $(2,2)$ είναι $y-f(2)=f'(2)(x-2) \Leftrightarrow y-2=1(x-2) \Leftrightarrow y=x$

Γ2. Για κάθε $x\in[1,2]$ έχουμε $f''(x)<0$ άρα η f είναι κοίλη και η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1,2]$, οπότε

$$1\le x\le 2 \Leftrightarrow f'(1)\ge f'(x)\ge f'(2)=1>0$$

άρα $f'(x)>0$ για κάθε $x\in[1,2]$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1,2]$ επομένως ορίζεται η f^{-1} και το πεδίο ορισμού της είναι το σύνολο τιμών της f δηλαδή

$$f([1,2]) = D_{f^{-1}} = [f(1), f(2)] = [0,2].$$

Γ3. Για κάθε $x\in(1,2)$ θα αποδείξουμε ισοδύναμα ότι

$$\frac{f(x)}{x-1} > \frac{2-f(x)}{2-x} \Leftrightarrow \frac{f(x)-f(1)}{x-1} > \frac{f(x)-f(2)}{x-2} \underset{\xi_1\in(1,x),\ \xi_2\in(x,2)}{\overset{\text{ΘΜΤ } [1,x],[x,2]}{\Leftrightarrow}} f'(\xi_1) > f'(\xi_2) \overset{f'\searrow}{\Leftrightarrow} \xi_1<\xi_2$$

που ισχύει.

Γ4. i. Για κάθε $x\in(1,2)$ ισχύει ότι

$$\frac{f(x)}{x-1}>\frac{2-f(x)}{2-x}\overset{x-1>0,\ 2-x>0}{\Leftrightarrow}(2-x)f(x)>(x-1)(2-f(x))\Leftrightarrow 2f(x)-xf(x)>2x-xf(x)-2+f(x)$$
$$\Leftrightarrow f(x)>2x-2$$

Επίσης, για $x=1$ και $x=2$ ισχύει η ισότητα. Τελικά, για κάθε $x\in[1,2]$ ισχύει

$$f(x)\geq 2x-2.$$

ii. Η f είναι κοίλη και η ευθεία $y=x$ είναι εφαπτομένη της C_f άρα ισχύει:

$$2x-2\leq f(x)\leq x$$

και επειδή οι συναρτήσεις $2x-2, f(x)$ και x είναι συνεχείς και όχι παντού ίσες στο διάστημα $[1,2]$ ισχύει:

$$\int_1^2(2x-2)dx<\int_1^2 f(x)dx<\int_1^2 xdx\Rightarrow\left[x^2-2x\right]_1^2<\int_1^2 f(x)dx<\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2\Leftrightarrow 1<\int_1^2 f(x)dx<\frac{3}{2}.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $(x_1,f(x_1))$ με $x_1>0$ είναι:

$$y-f(x_1)=f'(x_1)(x-x_1)\Leftrightarrow y-e^{x_1}=e^{x_1}(x-x_1)\ (1).$$

Η εξίσωση(1) διέρχεται από την αρχή των αξόνων αν και μόνο αν $y=x=0$:

$$-e^{x_1}=e^{x_1}(0-x_1)\Leftrightarrow x_1=1.$$

Επομένως, η εξίσωση (1) γίνεται:

$$y-e=e(x-1)\Leftrightarrow y=ex.$$

Δ2. Μια προφανής ρίζα της εξίσωσης $f(x)=ex$ είναι η ρίζα $x=1$. Για $x<0$ έχουμε:

$$f(x)=ex\Leftrightarrow 2-e^{-x}=ex\Leftrightarrow -e^{-x}-ex+2=0.$$

Έστω η συνάρτηση $h(x)=f(x)-ex=-e^{-x}-ex+2,\ x\in\mathbb{R}$.

Είναι,

- $h'(x)=e^{-x}-e$
- $h'(x)=0\Leftrightarrow e^{-x}-e=0\Leftrightarrow x=-1$
- $h'(x)>0\Leftrightarrow e^{-x}-e>0\Leftrightarrow x<-1$
- $h'(x)<0\Leftrightarrow e^{-x}-e<0\Leftrightarrow x>-1$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$h'(x)$	$+$	0	$-$
h	$\nearrow$		$\searrow$

όπου $h(-1)=-e+e+2=2>0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=-\infty$ και

$$\lim_{x\to-\infty} h(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(-e^{-x}-ex+2\right)=\lim_{x\to-\infty}\left[x\left(-\frac{e^{-x}}{x}-e+\frac{2}{x}\right)\right]=(-\infty)(+\infty-e+0)=-\infty,$$

διότι $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{-x}}{x}\overset{\left(\frac{+\infty}{-\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-e^{-x}}{1}=-\infty$. Τέλος, $h(1)=0$.

Η h είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty,-1]$ άρα το σύνολο τιμών της h είναι

$$h\left((-\infty,-1]\right)=(-\infty,2]$$

άρα υπάρχει ένα μοναδικό $x_0\in(-\infty,-1)$ τέτοιο ώστε

$$h(x_0)=0\Leftrightarrow f(x_0)-ex_0=0\Leftrightarrow f(x_0)=ex_0.$$

Δ3. Αναζητούμε το εμβαδόν

$$E(\Omega)=\int_{x_0}^{1}\left|f(x)-ex\right|dx=\int_{x_0}^{1}\left|h(x)\right|dx.$$

Η εξίσωση $h(x)=0$ έχει δύο διαδοχικές ρίζες, τις x_0 και 1 άρα από τις συνέπειες του Θ. Bolzano η συνεχής συνάρτηση $h(x)=f(x)-ex$, διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα $(x_0,1)$. Όμως, $h(0)=f(0)-e\cdot 0=1>0$ άρα $h(x)>0$ για κάθε $x\in(x_0,1)$.

Συνεπώς,

$$\begin{aligned}E(\Omega)=\int_{x_0}^{1}h(x)dx&=\int_{x_0}^{0}\left(f(x)-ex\right)dx+\int_{0}^{1}\left(f(x)-ex\right)dx=\int_{x_0}^{0}\left(2-e^{-x}-ex\right)dx+\int_{0}^{1}\left(e^{x}-ex\right)dx\\&=\left[2x+e^{-x}-\frac{ex^2}{2}\right]_{x_0}^{0}+\left[e^{x}-\frac{ex^2}{2}\right]_{0}^{1}\\&=1-\left(2x_0+e^{-x_0}-\frac{ex_0^2}{2}\right)+e-\frac{e}{2}-1\\&=-2x_0-e^{-x_0}+\frac{ex_0^2}{2}+\frac{e}{2}\ \text{τ.μ.}\end{aligned}$$

Δ4. Έστω $\left(x,2-e^{-x}\right)$, $x_0<x$ οι συντεταγμένες του $1^{ου}$ κινητού που βρίσκεται πάνω στη C_f.

Επίσης, $(x,ex), x_0<x<0$ είναι οι συντεταγμένες του $2^{ου}$ κινητού που βρίσκεται στην ευθεία ΒΟ.

Επειδή τα κινητά κινούνται στην ίδια οριζόντια ευθεία, όταν το $2^{ο}$ κινητό βρίσκεται στην θέση Ο, το $1^{ο}$ κινητό θα βρίσκεται στη θέση:

$$2-e^{-x}=0\Leftrightarrow e^{-x}=2\Leftrightarrow -x=\ln 2\Leftrightarrow x=-\ln 2$$

επομένως $\left(x,2-e^{-x}\right)$, $x_0<x<-\ln 2$.

Αναζητούμε την μέγιστη απόσταση της διαφοράς

$$\left|x_2-x_3\right|$$

όπου $\left(x_2,f(x_2)\right)$ η θέση του $1^{ου}$ κινητού και (x_3,y_3) η θέση του $2^{ου}$ κινητού. Γνωρίζουμε ότι

$$2-e^{-x_2}=ex_3\Leftrightarrow x_3=\frac{2-e^{-x_2}}{e}\quad(2).$$

Έστω συνάρτηση

$$d(x_2)=|x_3-x_2|\overset{(2)}{=}\left|\frac{2-e^{-x_2}}{e}-x_2\right|=\left|\frac{-e^{-x_2}-ex_2+2}{e}\right|=\frac{|h(x_2)|}{e}=\frac{h(x_2)}{e}$$

διότι $h(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[x_0,1]$.

Όμως $h(x)\geq h(-1)=2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ άρα

$$d(x_2)=\frac{h(x_2)}{e}\leq\frac{2}{e}=d(-1)$$

άρα η μέγιστη απόσταση είναι $\frac{2}{e}$ και επιτυγχάνεται για $x=-1$.

Σημείωση: Δίνεται το σχήμα για διδακτικούς σκοπούς