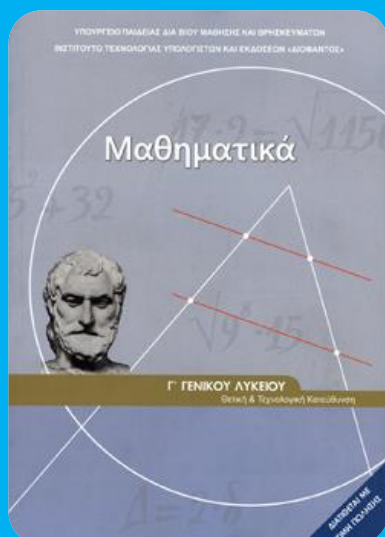




ΛΥΣΕΙΣ

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ
ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ**

**ΤΕΤΑΡΤΗ
8 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2021**



ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ

lisari team

ΛΥΣΕΙΣ

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ
ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ
ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2021**

1η έκδοση

Μιχάλης Γιαννόπουλος

Χρήστος Μαρούγκας

Χρήστος Σίσκας

Μάκης Χατζόπουλος

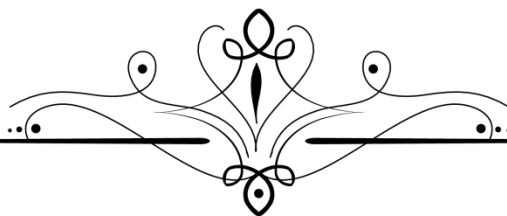
1η έκδοση: 8 – 9 – 2021 (συνεχής ανανέωση)



από το μαθηματικό **blog**

lisari.blogspot.com





Πρόλογος

Στο παρόν αρχείο περιλαμβάνονται οι λύσεις των Επαναληπτικών Πανελλαδικών Εξετάσεων 2021 στο μάθημα **Μαθηματικά Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών Οικονομίας και Πληροφορικής**. Η παρουσίαση των λύσεων είναι πλήρης και αναλυτική στο μέγιστο δυνατό, προκειμένου οι μαθητές να μπορούν να μελετήσουν και να επεξεργαστούν εύκολα το αρχείο.

Η εργασία αυτή εκπονήθηκε αποκλειστικά από τη γνωστή **διαδικτυακή ομάδα Μαθηματικών** από διάφορα μέρη της Ελλάδος, τη **lisari team**. Φέτος εστίασαμε στη ποικιλία των λύσεων και όσο στο χρόνο που θα αναρτηθούν οι λύσεις.

Την αρχική συγγραφή των λύσεων ακολούθησαν ενδελεχείς έλεγχοι, διορθώσεις και βελτιώσεις με στόχο μια **πληρέστερη και πιο ποιοτική παρουσίαση**. Ζητούμε συγνώμη για τυχόν παραλείψεις, λάθη ή αστοχίες που ενδεχομένως θα έχουν διαφύγει της προσοχής μας, γεγονός αναπόφευκτο δεδομένων των στενών χρονικών περιθωρίων. Θα ακολουθήσουν επόμενες εκδόσεις, όπου η εν λόγω παρουσίαση θα βελτιωθεί, ίσως εμπλουτιστεί και με εναλλακτικές λύσεις. Οποιαδήποτε σχόλια, παρατηρήσεις, διορθώσεις και βελτιώσεις επί των λύσεων είναι ευπρόσδεκτα στην ηλεκτρονική διεύθυνση lisari.blogspot@gmail.com.

Με εκτίμηση

lisari team

8 Σεπτεμβρίου 2021

lisari team

1. Αντωνόπουλος Νίκος (3^ο ΓΕΛ Άργους)
2. Αυγερινός Βασίλης (Φροντιστήριο "Διάταξη" - Ν. Σμύρνη)
3. Βελαώρας Γιάννης (Φροντιστήριο "Βελαώρας" - Λιβαδειά Βοιωτίας)
4. Βοσκάκης Σήφης (Φροντιστήριο "Ευθύνη" - Ρέθυμνο)
5. Γιαννόπουλος Μιχάλης (Θεσσαλονίκη - Αμερικάνικη Γεωργική Σχολή)
6. Γκριμπαβιώτης Παναγιώτης (Φροντιστήριο "Λύση" - Άρτα)
7. Δούδης Δημήτρης (3^ο Λύκειο Αλεξανδρούπολης)
8. Ζαμπέλης Γιάννης (Φροντιστήρια "Πουκαμισάς" Γλυφάδας)
9. Κακαβάς Βασίλης (Φροντιστήριο "Ωθηση" - Μαρούσι)
10. Κάκανος Γιάννης (Φροντιστήριο "Παπαπαναγιώτου – Κάκανος" - Σέρρες)
11. Κανάβης Χρήστος (Διδακτορικό στο ΕΜΠ – Αναπληρωτής)
12. Καρδαμίτσης Σπύρος (Πρότυπο Λύκειο Αναβρύτων)
13. Κουλούρης Ανδρέας (3^ο ΓΕΛ Γαλατσίου)
14. Κουστέρης Χρήστος (Φροντιστήριο "Στόχος" - Περιστέρι)
15. Κοπάδης Αθανάσιος (Φροντιστήριο 19+ στο Πολύγωνο)
16. Μανώλης Ανδρέας (Φροντιστήριο "Ρηγάκης" - Κοζάνη)
17. Μαρούγκας Χρήστος (3^ο ΓΕΛ Κηφισιάς)
18. Μπαδέμης Δημήτρης (Φροντιστήριο "Πουκαμισάς" - Γλυφάδας)
19. Νάννος Μιχάλης (1^ο Γυμνάσιο Σαλαμίνας)
20. Νικολόπουλος Αθανάσιος (2^ο ΓΕΛ, Ζάκυνθος)
21. Παγώνης Θεόδωρος (Φροντιστήριο "Εις τη ν" - Αργίνιο)
22. Παπαδομανωλάκη Μαρία (Καθηγήτρια Μαθηματικών - Ρέθυμνο)
23. Παπαμικρούλης Δημήτρης (Εκπαιδευτικός Οργανισμός "Ρόμβος")
24. Ποδηματάς Θωμάς (Σπουδαστήριο Μαθηματικών Θωμάς και Ρόζα Ποδηματά - Βόλος)
25. Πολύζος Γιώργος (τ. πάρεδρος στο Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, συγγραφέας)
26. Ράπτης Γιώργος (6^ο ΓΕΛ Βόλου)
27. Σίσκας Χρήστος (Φροντιστήριο "Μπαχαράκης" - Θεσσαλονίκη)
28. Σκομπής Νίκος (Συγγραφέας – 1^ο Λύκειο Χαλκίδας)
29. Σπλήνης Νίκος (Φροντιστήριο "Ορίζοντες" - Ηράκλειο Κρήτης)
30. Σταυρόπουλος Παύλος (Ιδιωτικά Εκπαιδευτήρια Δούκα)
31. Σταυρόπουλος Σταύρος (Πρόεδρος Ε.Μ.Ε Κορινθίας - ΓΕΛ Ζευγολατιού)
32. Τσακαλάκος Τάκης (συνταξιούχος αλλά ενεργός μαθηματικός)
33. Χαραλάμπους Σταύρος (Διάθεση Δ ΠΥΣΔΕ Αθήνας)
34. Χασάπης Γεώργιος (Ιδιωτικός υπάλληλος)
35. Χατζόπουλος Μάκης (3^ο ΓΕΛ Κηφισιάς)

lisari team / Σχολικό έτος 2020 – 21

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: ΤΕΤΑΡΤΗ 8 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2021

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΣΠΟΥΔΩΝ

ΘΕΤΙΚΗΣ, ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΕΞΙ (6)

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 133.

A2. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 73.

A3. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 128.

A4. α) Λάθος β) Σωστό γ) Σωστό δ) Λάθος ε) Λάθος.

ΘΕΜΑ Β

B1. Για κάθε $x > 1$ έχουμε:

$$f'(x) = \left(\frac{1}{1-\sqrt{x}} \right)' = -\frac{1}{(1-\sqrt{x})^2} \cdot (1-\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x} \cdot (1-\sqrt{x})^2} > 0.$$

Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(1, +\infty)$, επομένως «1 – 1», άρα αντιστρέφεται.

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(1, +\infty)$, άρα, το σύνολο τιμών της είναι:

$$f((1, +\infty)) = \left(\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (-\infty, 0) = D_{f^{-1}},$$

διότι:

- $\lim_{x \rightarrow 1^+} (1-\sqrt{x}) = 0$ και $1-\sqrt{x} < 0$, όταν $x \rightarrow 1^+$, άρα $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{1-\sqrt{x}} = -\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1-\sqrt{x}) = -\infty$.

Άρα,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-\sqrt{x}} = 0.$$

Για κάθε $x > 1$ έχουμε:

$$\begin{aligned} y = f(x) &\Leftrightarrow y = \frac{1}{1-\sqrt{x}} \Leftrightarrow 1-\sqrt{x} = \frac{1}{y} \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{y-1}{y} \\ &\Leftrightarrow x = \left(\frac{y-1}{y} \right)^2 \Leftrightarrow f^{-1}(y) = \left(\frac{y-1}{y} \right)^2. \end{aligned}$$

Επομένως,

$$f^{-1}(x) = \left(\frac{x-1}{x} \right)^2, \quad x < 0.$$

B2. Έχουμε:

$$D_{g \circ f^{-1}} = \{x \in D_{f^{-1}} / f^{-1}(x) \in D_g\} = \{x \in (-\infty, 0) / x \in (-\infty, 0)\} = (-\infty, 0),$$

διότι:

$$f^{-1}(x) \in D_g \Leftrightarrow \left(\frac{x-1}{x} \right)^2 \geq 0, \text{ ισχύει για κάθε } x \in (-\infty, 0).$$

Για κάθε $x \in (-\infty, 0)$ έχουμε:

$$(g \circ f^{-1})(x) = g(f^{-1}(x)) = \sqrt{\left(\frac{x-1}{x} \right)^2} = \left| \frac{x-1}{x} \right| = \frac{x-1}{x}.$$

Επομένως,

$$h(x) = \frac{x-1}{x}, \quad x < 0.$$

B3. Κατακόρυφες ασύμπτωτες:

Έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left((x-1) \cdot \frac{1}{x} \right) \stackrel{x < 0}{=} (-1) \cdot (-\infty) = +\infty.$$

Επομένως, η γραφική παράσταση της συνάρτησης h έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $\varepsilon_1 : x = 0$ (άξονας $y'y$).

Οριζόντιες – πλάγιες ασύμπτωτες:

Έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1.$$

Επομένως, η γραφική παράσταση της συνάρτησης h έχει οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $\varepsilon_2 : y = 1$.

B4. Στο όριο $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{-h(x)}$ θέτουμε $u = -h(x)$, άρα:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (-h(x)) = - \lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) \stackrel{B3}{=} -\infty.$$

Επομένως, όταν $x \rightarrow 0^-$ έχουμε $u \rightarrow -\infty$, άρα,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{-h(x)} = \lim_{u \rightarrow -\infty} e^u = 0 \quad (1).$$

Για κάθε x κοντά στο 0^- ισχύει:

$$\left| e^{-h(x)} \cdot \eta \mu \frac{1}{x} \right| \leq \left| e^{-h(x)} \right| \Leftrightarrow -e^{-h(x)} \leq e^{-h(x)} \cdot \eta \mu \frac{1}{x} \leq e^{-h(x)}$$

και

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(-e^{-h(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{-h(x)} \stackrel{(1)}{=} 0.$$

Σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής, ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(e^{-h(x)} \cdot \eta \mu \frac{1}{x} \right) = 0.$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Αν ο μαθητής επιλέγει την διαδρομή I, τότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο, αφού $\hat{\Gamma} = \frac{\pi}{2}$ ως εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο. Επίσης, η γωνία θ είναι εξωτερική γωνία του τριγώνου ΑΟΓ άρα:

$$BO\Gamma = O\Lambda\Gamma + \Lambda\Gamma O \stackrel{O\Lambda\Gamma = \Lambda\Gamma O}{\Leftrightarrow} \theta = 2O\Lambda\Gamma \Leftrightarrow O\Lambda\Gamma = \frac{\theta}{2}.$$

Έχουμε,

$$\sin(O\Lambda\Gamma) = \frac{A\Gamma}{AB} \Leftrightarrow \sin \frac{\theta}{2} = \frac{A\Gamma}{2R} \Leftrightarrow A\Gamma = 2\sin \frac{\theta}{2}.$$

Αν t_1 το χρονικό διάστημα που ο μαθητής κωπηλατεί, τότε έχουμε:

$$A\Gamma = v_1 t_1 \Leftrightarrow 2\sin \frac{\theta}{2} = 2t_1 \Leftrightarrow t_1 = \sin \frac{\theta}{2}.$$

Αν t_2 είναι το χρονικό διάστημα που ο μαθητής βαδίζει, τότε έχουμε:

$$\Gamma B = v_2 t_2 \Leftrightarrow \theta \cdot R = 4t_2 \Leftrightarrow t_2 = \frac{\theta}{4}.$$

Ο συνολικός χρόνος που χρειάζεται ο μαθητής είναι:

$$t = t_1 + t_2 = \frac{1}{4}\theta + \sin \frac{\theta}{2}$$

δηλαδή,

$$t(\theta) = \frac{1}{4}\theta + \sin \frac{\theta}{2}, \quad \theta \in (0, \pi).$$

- Αν ο μαθητής επιλέγει την διαδρομή II, τότε:

$$AB = v_1 t \Leftrightarrow 2R = 2t \Leftrightarrow t = 1.$$

- Αν ο μαθητής επιλέγει την διαδρομή III, τότε

$$A\Gamma B = v_2 t \Leftrightarrow \pi R = 4t \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{4}.$$

Ο συνολικός χρόνος που χρειάζεται σε καθεμία από τις διαδρομές είναι

$$t(\theta) = \begin{cases} 1 & , \theta = 0 \\ \frac{1}{4}\theta + \sin \frac{\theta}{2} & , \theta \in (0, \pi) \\ \frac{\pi}{4} & , \theta = \pi \end{cases}$$

ή

$$t(\theta) = \frac{1}{4}\theta + \sin \frac{\theta}{2}, \theta \in [0, \pi].$$

Γ2. Η συνάρτηση $t(\theta)$ είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων. Έχουμε

$$t'(\theta) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\eta\mu \frac{\theta}{2}, \theta \in [0, \pi].$$

Έχουμε,

$$t'(\theta) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\eta\mu \frac{\theta}{2} = 0 \Leftrightarrow \eta\mu \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\theta}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow \frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{3}.$$

Έτσι λοιπόν είναι $t'(\theta) \neq 0$ σε κάθε ένα από τα διαστήματα $\left[0, \frac{\pi}{3}\right)$ και $\left(\frac{\pi}{3}, \pi\right]$ και επειδή η συνάρτηση $t'(\theta)$ είναι συνεχής θα διατηρεί πρόσημο στα παραπάνω διαστήματα. Παρατηρούμε ότι

$$t'(0) = \frac{1}{4} > 0$$

και

$$t'(\pi) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\eta\mu \frac{\pi}{2} = -\frac{1}{4} < 0.$$

Άρα ο πίνακας μεταβολών για τη συνάρτηση t είναι ο εξής:

θ	0	$\frac{\pi}{3}$	π
$t'(\theta)$	+	−	
t	↗	↘	

Με τη βοήθεια του παραπάνω πίνακα συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση $t(\theta)$ μεγιστοποιείται για

$$\theta = \frac{\pi}{3}.$$

Γ3. Από το ερώτημα (Γ2) παρατηρούμε ότι η συνάρτηση t παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για

$\theta_1 = 0$ με τιμή $t(0) = 1$ και παρουσιάζει επίσης τοπικό ελάχιστο για $\theta_2 = \pi$ με τιμή $t(\pi) = \frac{\pi}{4}$.

Επιπλέον, η συνάρτηση $t(\theta)$ θα παρουσιάζει ολικό μέγιστο και ολικό ελάχιστο αφού είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[0, \pi]$ σύμφωνα με το θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής. Όμως

$$\frac{\pi}{4} < 1 \Leftrightarrow t(\pi) < t(0)$$

ο χρόνος μετάβασης από το σημείο Α στο σημείο Β είναι ο ελάχιστος δυνατός όταν $\theta = \pi$ δηλαδή στην επιλογή ΙΙΙ.

Θέμα Δ

Δ1. Έχουμε,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{-g(x)} + \alpha x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - \alpha x} + \alpha x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(\sqrt{1 - \frac{\alpha}{x}} + \alpha \right) \right]$$

- Αν $\alpha > -1$ τότε το όριο ισούται με $+\infty$, άτοπο.
- Αν $\alpha < -1$, τότε το όριο ισούται με $-\infty$, άτοπο.

Όμως το όριο υπάρχει στο $\mathbb{R}$, οπότε $\alpha = -1$.

Πράγματι, για $\alpha = -1$ έχουμε:

$$g(x) = -x^2 - x, x \in \mathbb{R}$$

και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{-g(x)} + \alpha x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}.$$

Δ2. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ είναι:

$$y - e^{x_0} = e^{x_0} (x - x_0) \quad (1).$$

Για να διέρχεται από το σημείο $M(-1, 0)$ έχουμε:

$$-e^{x_0} = e^{x_0} (-1 - x_0) \Leftrightarrow -1 = -1 - x_0 \Leftrightarrow x_0 = 0.$$

Επομένως, η (1) γίνεται:

$$y - e^0 = e^0 (x - 0) \Leftrightarrow y = x + 1.$$

Θα δείξουμε ότι η ευθεία $y = x + 1$ εφάπτεται σε ένα ακριβώς σημείο με τη C_g .

Έχουμε,

$$g(x) = x + 1 \Leftrightarrow -x^2 - x = x + 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -1.$$

Άρα η ευθεία $y = x + 1$ με τη C_g έχουν ένα κοινό σημείο στο $x = -1$. Όμως

$$g'(x) = -2x - 1$$

οπότε

$$g'(-1) = 1 = \lambda_e$$

άρα η ευθεία $y = x + 1$ εφάπτεται της C_g .

Δ3. Γνωρίζουμε ότι,

$$f(x) = e^x \geq x+1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

με την ισότητα να ισχύει για $x=0$.

Θα αποδείξουμε ότι: $x+1 \geq g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει για $x=-1$.

Έχουμε,

$$x+1 \geq g(x) \Leftrightarrow x+1 \geq -x^2 - x \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 \geq 0 \text{ που ισχύει } x \in \mathbb{R}$$

με την ισότητα να ισχύει για $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$.

Επομένως,

$$f(x) \geq x+1 \geq g(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Ομως, η ισότητα $f(x) = x+1$ και $g(x) = x+1$ πραγματοποιείται για διαφορετικές τιμές του x , άρα

$$f(x) > g(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Δ4. Έστω η συνάρτηση

$$h(x) = (x-k-1)[f(x-1)-x] + (x-k)(f(x)-g(x)), x \in \mathbb{R}.$$

Έχουμε,

- η h είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[k, k+1]$
- $h(k+1) = f(k+1) - g(k+1) > 0$, από το προηγούμενο ερώτημα,
- $h(k) = k - f(k-1) = k - e^{k-1} < 0$,

διότι $e^x \geq x+1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει για $x=0$, άρα για $x=k-1$ γίνεται: $e^{k-1} \geq k$ με την ισότητα να ισχύει για $k-1=0 \Leftrightarrow k=1$, που απορρίπτεται διότι $k \neq 1$, άρα $e^{k-1} > k \Leftrightarrow k - e^{k-1} < 0$.

Τελικά, εξίσωση

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{f(x-1)-x}{x-k} + \frac{f(x)-g(x)}{x-k-1} = 0$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο ανοικτό διάστημα $(k, k+1)$.